LES BESOINS PRAXEOLOGIQUES DU PROFESSEUR : LE NOMBRE ORDINAL

Claire Margolinas, Laboratoire ACTé, ESPE Clermont-Auvergne, Université Blaise Pascal, Clermont-Université

Floriane Wozniak, IRIST, ESPE Académie de Strasbourg, Université de Strasbourg

INTRODUCTION

Nous nous intéressons depuis longtemps à la construction de l'œuvre du professeur (Margolinas & Wozniak, 2009) : comment cette œuvre évolue-t-elle ? Comment le professeur contrôle-t-il sa transformation, au plan épistémologique, notamment ? C'est dans ce cadre très général que nous considérons la façon dont des éléments nouveaux s'intègrent ou non dans l'œuvre du professeur.

La question de la diffusion des savoirs didactiques, posée dans le cadre du thème fédérateur de cet ouvrage, est ainsi au cœur de notre travail sur l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle (Margolinas & Wozniak, 2012). Dans le présent texte, nous questionnons cette diffusion de plusieurs manières.

Nous commençons par revisiter la distinction entre connaissance et savoir, ce qui nous permet en particulier de mettre en évidence l'importance des institutions dans la légitimation des savoirs, et d'interroger les difficultés du professeur à intégrer certains enseignements dans le curriculum qu'il conçoit.

Nous poursuivons en étudiant le cas du nombre ordinal à l'école maternelle, en examinant d'abord les programmes et une partie de la documentation à la disposition des professeurs. Nous décrivons ensuite une ingénierie didactique que nous avons conçue et expérimentée (Margolinas & Wozniak, 2014) dans la classe de deux professeurs (en mai et juin 2012), ce qui nous permet de mieux comprendre les connaissances que les élèves peuvent construire dans cette séquence de situations adidactiques, mais aussi ce qui ne semble pas pouvoir se construire sans une part d'intervention plus importante du professeur dans le processus d'institutionnalisation. Nous étudions ensuite la façon dont, l'année suivante, ces deux professeurs et un autre enseignant ont modifié ou non la ressource initiale et l'effet de ces modifications sur les apprentissages de leurs élèves.

Cette étude nous permet de mieux comprendre les besoins praxéologiques du professeur et les moyens de les observer.

CONNAISSANCE ET SAVOIR

La distinction entre connaissance et savoir est fondamentale dans le cadre de la théorie des situations (Brousseau, 1998a; Perrin-Glorian, 1994), même si dans l'article fondateur de la théorie des situations (Brousseau, 1972), le terme de savoir n'apparaît pas et celui de connaissance rarement. Cependant, le *« savoir constitué ou en voie de constitution »* (Perrin-Glorian, 1994, p. 107) est le point de départ du projet social d'enseignement, alors que :

> « les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes » (Brousseau, 1978, p. 2 dans la version déposée sur HAL).

On voit donc se dessiner la ligne de démarcation entre savoir et connaissance au travers des sens différents qu'ils prennent dans le travail de Guy Brousseau : le savoir se constitue dans la culture et les connaissances se rencontrent en situation. Ce qui intéresse Brousseau, à la fois dans son travail théorique et dans ses travaux d'ingénierie, ce sont surtout les connaissances :

dans quelle(s) situation(s) les connaissances sont-elles rencontrées comme des solutions optimales ? En situation d'action (au sens de la théorie des situations), les connaissances sont d'abord implicites. Elles sont ensuite formulées et validées au travers d'autres types de situations (formulation, validation) avant d'acquérir une fonction de savoir dans la culture de la classe au terme du processus d'institutionnalisation. Cette présentation du processus d'évolution d'une connaissance en savoir n'induit pas de délimitations étanches établies une fois pour toute : rien n'est « en soi » une connaissance ou un savoir.

Conne (1992) adopte un point de vue différent. Son travail prend sa source dans la résolution de :

> « l'épineux problème des rapports qui lient le projet de la didactique des mathématiques avec ceux de l'épistémologie génétique et de la psychologie piagétienne de la connaissance » (p. 224).

La caractérisation de la distinction entre savoir et connaissance à laquelle il arrive alors est la suivante :

> « Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans le sens qu'elle permet au sujet d'agir sur sa représentation » (p. 225).

Il nous semble que l'apport fondamental du travail de Conne réside dans l'identification d'une étape décisive dans le processus d'évolution d'une connaissance vers un savoir : la reconnaissance d'une connaissance utile. Cependant, suivant ce point de vue, c'est le sujet lui-même qui trace la ligne de démarcation entre savoir et connaissance, puisque c'est la reconnaissance de l'utilité d'une connaissance *pour* et *par* le sujet qui la qualifie comme savoir. Il y a ainsi chez Conne un déplacement du sens du terme de « savoir » dans le sens d'une interprétation psychologique. En introduisant, comme nous allons le faire maintenant, non seulement les situations mais également les institutions, nous allons donner à la distinction connaissance/savoir une autre dimension, qui va nous être utile dans la suite du texte.

De récents travaux (Laparra & Margolinas, 2010; Margolinas, 2012a; Margolinas, 2012b) nous ont amenées s à réinterroger cette distinction entre connaissance et savoir. Contrairement à François Conne, notre questionnement ne s'est pas nourri de l'intérêt pour un lien entre psychologie et didactique mais plutôt de celui de la nécessité d'une conception anthropologique et sociologique des savoirs et des connaissances du point de vue de la théorie des situations. Pour clarifier la suite du texte, nous donnerons ici d'emblée les définitions que nous avons adoptées et nous en donnerons les raisons dans un deuxième temps.

Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc.

Un savoir est une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 2004) *et qui est par nature un texte* (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Alors que les connaissances sont aux prises avec le contingent, les savoirs se distinguent par leur pouvoir générateur, ce qui dans les mots de la théorie anthropologique du didactique s'exprime sous la forme :

> Ainsi, dans une praxéologie regardée comme un savoir, dans ce qu'on nommera ici une *organisation de savoir*, le bloc technologico-théorique doit apparaître, non comme une création opportuniste visant à justifier spécifiquement tel bloc pratico-technique particulier, mais comme possédant au contraire une assez forte *générativité*, et permettant d'engendrer des techniques, des justifications, des explications, des « connaissances » relativement à un ensemble vaste et divers de types de tâches. (Chevallard, 1997a, p. 5 de la version signalée par l'URL).

Ainsi, le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il est linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle.

Ce que l'on peut retenir schématiquement de cette distinction, c'est que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution.

Pour définir une connaissance, le didacticien décrit les situations fondamentales de cette connaissance (Bessot, 2011; Brousseau, 1986; Legrand, 1996). Pour définir un savoir, il faut dire quelle est l'institution qui produit et légitime ce savoir, et pourquoi ce savoir est légitime dans cette institution-là, ce qui conduit parfois à considérer plusieurs institutions et leurs éventuels conflits.

En associant ainsi les connaissances avec les situations et les savoirs avec les institutions – dans lesquelles les situations vivent (ou peuvent vivre) –, nous cherchons à clarifier les processus qui lient connaissances et savoirs au sein des situations didactiques. C'est au travers des deux processus fondamentaux de dévolution et d'institutionnalisation – pris dans une conception plus large que ce qui est entendu d'ordinaire à leur propos – que nous tissons le lien dialectique entre savoir et connaissance (figure 1).

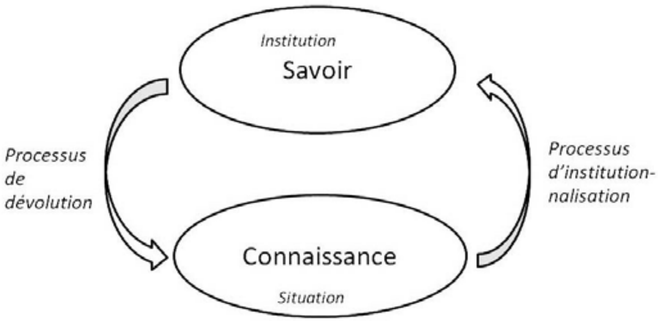

***Figure 1**.- savoir et connaissance*

Si un savoir existe dans une institution, c'est qu'il a été rencontré comme une connaissance en situation, reconnu utile, c'est-à-dire comme solution optimale dans un système de contraintes, puis formulé, formalisé, mémorisé, validé – et donc mis à l'épreuve, généralisé et *in fine* reconnu comme ayant une valeur culturelle et sociale. C'est donc bien un *processus d'institutionnalisation*, envisagé comme processus de reconnaissance et de légitimation, qui transforme les connaissances en savoirs et régit ce changement de statut.

L'institutionnalisation dans le cadre de la classe, vue comme un processus qui engage les élèves dans l'avancée du temps didactique, est en quelque sorte un cas particulier du processus d'institutionnalisation tel que nous le présentons ici. Si la classe joue bien le rôle d'institution pour les élèves, le professeur, lui, conçoit le savoir dans d'autres institutions, qui légitiment sa démarche d'enseignement. Cette légitimation, ou son absence, est ainsi une clé interprétative des dysfonctionnements possibles de l'institutionnalisation dans la classe (Coulange, 2012; Margolinas & Laparra, 2008a) et sera l'une des pistes de ce texte.

Le problème fondamental qui se pose dans l'étude ou l'aide à l'étude des savoirs, c'est que la mise en texte efface les questionnements et les situations qui ont été rencontrées dans la genèse de ces savoirs, ce qui en fait leur *raison d'être* (Chevallard, 2002a; Chevallard, 2002b). Pour étudier ou aider quelqu'un à étudier, pour enseigner, il faut déconstruire les savoirs pour retrouver les connaissances et les situations qui permettent de leur donner sens : ce qui fonde le *processus de dévolution.* Le processus de dévolution, tel que nous l'entendons ici, fonde tout système didactique et n'est donc pas confiné à la classe. Du processus de dévolution naît le didactique. Ainsi, la dévolution, dans le cadre de la classe, est en quelque sorte un cas particulier du processus de dévolution tel que nous le présentons ici : pour réaliser la dévolution d'une situation fondamentale (quelle que soit la forme de l'engagement des élèves), le professeur a dû transformer ce qui est lui est donné comme un savoir pour construire des situations. Enseigner consiste, en effet, à permettre une intelligibilité des savoirs, ce qui ne peut pas se faire sans les considérer comme des connaissances en situation. Ce double processus de dévolution et d'institutionnalisation éclaire le lien dialectique entre savoirs didactiques du professeur et savoirs (mathématiques) à acquérir par l'élève (Margolinas & Wozniak, 2012).

Si nous considérons qu'enseigner consiste à faire vivre des situations qui fassent rencontrer des connaissances qui pourront être instituées en savoir, nous ne faisons pas d'hypothèse particulière sur la méthode qui prévaut à une telle construction. L'exposé magistral, à l'aide d'exemples et de métaphores, peut convoquer de façon plus ou moins implicite des situations fondamentales du savoir et s'avérer efficace si les élèves peuvent effectivement convoquer mentalement de telles situations (Schneider, 2011). Faire la dévolution aux élèves d'une situation adidactique dans laquelle les connaissances rencontrées seront un temps implicites et suivre un processus d'institutionnalisation de ces connaissances dans une progression de situation en situation permettant une explicitation progressive des connaissances est une autre façon de faire rencontrer les situations fondamentales d'un savoir (Brousseau, 1980; Brousseau, 1981).

Les failles possibles d'un extrême à l'autre de ce que nous pouvons identifier comme des formes pédagogiques sont connues. D'un côté la rencontre des situations et donc des connaissances est hasardeuse et risque de priver les élèves de la possibilité de faire usage de connaissances en situation, ce qui n'est pas sans incidence notamment quand, hors de l'institution scolaire, ils rencontreront des situations qu'il faudra surmonter dans la vie sociale ou professionnelle. D'un autre, la stabilisation des savoirs peut être négligée au profit d'un passage d'une situation à l'autre, sous l'effet d'une survalorisation du « faire » sans lien avec aucun savoir (Bautier & Rayou, 2009).

Au-delà de formes particulières, le didactique se situe dans cette circulation entre connaissances et savoirs. Ce qui est donné à étudier provient toujours d'une institution qui légitime cette étude – c'est en ce sens un savoir. Cette légitimation agit à la fois sur le professeur, qui est appelé à organiser l'étude et sur la société, qui considère ainsi qu'il est bon d'étudier un tel savoir. Mais ce qui est donné à étudier a également pour but permettre aux individus de faire face à de nouvelles situations – ce sont donc des connaissances. C'est pour rendre compte de cette dialectique que la théorie anthropologique du didactique utilise le modèle des praxéologies qui rend solidaire un savoir-faire (une connaissance au sein d'une *praxis*) et un savoir (qui s'exprime par un *logos*).

Le travail didactique du professeur se situe dans l'articulation des deux processus de dévolution et d'institutionnalisation. Dans le processus de dévolution d'une connaissance, il élabore des situations pour l'élève, il interagit avec un milieu (ressources, contraintes) : le professeur a donc des connaissances en situation. Le processus d'institutionnalisation repose sur l'existence d'une institution, à laquelle est assujetti le professeur, qui légitime des savoirs comme des savoirs à enseigner. Pour le professeur, construire des situations pour l'élève suppose donc que certains savoirs mathématiques soient légitimes à être enseignés, que des situations soient disponibles (ressources) et que les contraintes (pédagogiques, didactiques) n'empêchent pas ces situations d'être mises en œuvre.

Le professeur est le sujet de diverses institutions – dont rend compte l'échelle des niveaux de codétermination didactiques (Chevallard, 2002b; Wozniak, 2005) – parmi lesquelles :

- la profession, qui impose ses normes et ses valeurs au professeur
- l'institution scolaire, qui produit des programmes officiels écrits ;
- la société et en particulier les parents ;
- l'institution de formation, qui a en partie façonné ses conceptions des mathématiques et de leur enseignement.

La légitimation des savoirs mathématiques comme objets d'enseignement d'un professeur donné ne peut donc pas s'analyser à partir d'une seule institution. C'est ainsi que nous commencerons par étudier le rapport institutionnel au nombre ordinal au sein de l'institution « école primaire française » et plus particulièrement « école maternelle française ».

LE NOMBRE ORDINAL A L'ECOLE EN FRANCE

Pour aborder le nombre ordinal à l'école primaire en France, nous commencerons par en donner une définition minimaliste. Ainsi, écrites sur une ligne, les lettres A, Z, E, R, T, Y sont visuellement parcourues selon le sens de la lecture qui crée un ordre dans l'énonciation des éléments de cet ensemble : le nom de la lettre « Z » sera énoncée avant celui de la lettre « E » mais après celui de la lettre « A ». L'ordre de la lecture constitue cet ensemble de lettres en une suite ordonnée, une liste. Chaque lettre occupe alors une place bien déterminée au sein de la liste et corrélativement à chaque position dans la liste est associée une lettre. L'ordre immuable de la comptine numérique se superpose à l'ordre créé par le sens de parcours de la liste. Chaque mot-nombre énoncé est alors associé à une position et dans la correspondance terme à terme réalisée avec la comptine numérique, la lettre « Z » est appariée avec le nombre « 2 » : $A \rightarrow 1$, $Z \rightarrow 2$, $E \rightarrow 3$, $R \rightarrow 4$, $T \rightarrow 5$, $Y \rightarrow 6$. La lettre « Z » est alors en deuxième position dans la liste car associée à « deux », systématiquement. Le nombre ordinal est ainsi l'expression de la mémoire de la position d'un élément singulier au sein d'une liste. Il est associé au contexte de suite ordonnée, nécessite le recours à la comptine numérique, repose sur une mise en correspondance biunivoque et use d'un vocabulaire spécifique – les adjectifs ordinaux, premier(e), deuxième, etc.

C'est avec cette définition que nous allons considérer à présent le rôle et la place du nombre ordinal à l'école primaire[1] en France. De façon à déterminer le rapport institutionnel à cet objet de savoir au sein de l'école, nous étudierons successivement le programme d'enseignement de l'école maternelle – enfants de 3 à 6 ans – et de l'école élémentaire – enfants de 6 à 11 ans d'une part, puis la documentation scolaire pour ces différents niveaux d'enseignement, d'autre part.

1. Le nombre ordinal dans le programme scolaire

Le programme d'enseignement de l'école maternelle en vigueur en 2013, paru au bulletin officiel du ministère de l'Éducation nationale du 19 juin 2008, est succinct. Il mentionne cependant l'importance des apprentissages numériques, tant pour dire la quantité qu'une position :

> « L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. » (Ministère de l'éducation nationale, 2008, p. 15).

Cependant, si le nombre ordinal est explicitement mentionné dans le contexte d'une « liste ordonnée d'objets », dans le résumé de ce qu'à la fin de l'école maternelle l'enfant doit être capable de faire, le nombre ordinal n'est plus mentionné :

> « - comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ;
> - mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ;
> - dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ; » (Op. cité, p. 16).

[1] L'école primaire en France se compose de l'école maternelle et de l'école élémentaire.

Dans ce même bulletin officiel est promulgué le programme d'enseignement de l'école élémentaire. Si le nombre ordinal n'est pas explicitement mentionné, la relation d'ordre sur les nombres entiers est mentionnée au travers des types de tâches : comparer, ranger, encadrer les nombres et en référence à la droite graduée (sachant que cette graduation, au début de l'école élémentaire, n'utilise que des entiers). Ainsi durant les deux premières années de l'école élémentaire « Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent. » (Ibid., p. 18). En particulier, en deuxième année il est précisé que les élèves devront : « Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. » (Ibid., p. 33).

Les programmes d'enseignement de l'école primaire étant succincts, deux documents d'accompagnement ont été édités par le ministère de l'Éducation nationale sous la direction de deux inspecteurs généraux. Dans le premier d'entre eux, *le nombre au cycle 2* (Durpaire & Mégard, 2010), un chapitre est consacré aux « premières compétences pour accéder au dénombrement » (Emprin & Emprin, 2010). Les auteurs attribuent trois fonctions au nombre (entier) : « mémoriser les quantités », « anticiper, c'est-à-dire de donner le résultat d'une action sans avoir à la réaliser » et « conserver la mémoire du rang d'un élément dans une collection organisée ». Ils précisent pour cette dernière fonction :

> « le nombre sert à mémoriser la position d'un objet dans une file par exemple. Pour cela, il faut que les élèves soient capables, dans une collection organisée, de définir un sens de parcours, c'est-à-dire de donner un ordre. La suite orale ou écrite des nombres est ordonnée (les élèves doivent repérer les nombres qui sont avant et après, le suivant et le précédent d'un nombre). » (*op.cit.*, p. 24)

Notons cependant que si une piste est une collection organisée (linéairement), toute collection organisée n'est pas nécessairement une liste, comme dans le cas d'une organisation tabulaire en « lignes et colonnes » par exemple. Ainsi, deux artefacts sont évoqués comme étant propices à faire le lien entre nombre cardinal et ordinal : la bande numérique et le jeu de piste où « la case marquée 7 est la septième case, mais l'élève l'atteint en comptabilisant les points de deux dés, par exemple un dé 5 et un dé 2 » (Bolsius & Gros, 2010, p. 36).

Dans le second document d'accompagnement, *le nombre au cycle* 3 (Durpaire & Mégard, 2012), sont rappelés les acquis des cycles précédents, cependant, le nombre ordinal n'est pas mentionné et même minoré. On y considère en effet que : « Au cycle 1 et au début du cycle 2, le nombre désigne avant tout le cardinal d'une collection. » (Gros & Calmelet, 2012, p. 7) et que « […] de la maternelle à la fin de l'école élémentaire le sens du nombre se construit en cours de mathématiques à l'occasion d'exercices de dénombrement et de mesurage qui sollicitent le code (écritures chiffrées, nom des nombres, unités de numération) et d'apprentissage du fonctionnement du code. » (*op. cit.* p.8) La détermination du rapport institutionnel à un objet de savoir ne se limite pas à l'étude des programmes d'enseignement ou de la documentation scolaire officielle. Au-delà, guides pédagogiques à destination des professeurs, fichiers ou manuels à destination des élèves, sites sur Internet ou observations dans les classes concourent à cartographier les praxéologies scolaires, c'est-à-dire les connaissances et les savoirs qui vivent dans l'institution scolaire. C'est ainsi que nous allons à présent nous intéresser à une séquence d'enseignement sur le repérage d'une position à l'école maternelle.

2. Repérer une position à l'école maternelle

Afin de donner corps aux pratiques scolaires de repérage, nous allons à présent considérer un exemple de situations d'enseignement en petite section de maternelle – les élèves ont entre 3 et 4 ans – issues de l'ouvrage à destination des professeurs *Vers les maths. Maternelle Petite section* (Duprey, Duprey, & Sautenet, 2009). La première situation se réalise en salle de motricité. Les élèves choisissent une place dans un « train » en déposant, dans un des quatre ou cinq cartons représentant la locomotive et les wagons, leur étiquette prénom. Une fois qu'une place choisie dans le train et mémorisée par la présence de l'étiquette prénom, les élèves doivent se placer dans un autre train dans la même position. La réussite se vérifie par la mise en correspondance des deux trains en les plaçant côte à côte. La seconde situation a lieu dans la salle de classe où quatre personnages différents – deux poupées, un ourson et un clown – sont assis sur quatre chaises alignées représentant un train. La première chaise de couleur distincte des autres représente la locomotive. Après un temps d'observation, les personnages sont retirés et les élèves doivent retrouver leur place initiale en les replaçant dans le train. Dans la troisième situation l'élève dispose du dessin d'un train avec une locomotive suivie de trois voitures dont chacune est de couleurs distinctes. Il s'agit de placer des cartes représentant des personnages à la même place que sur le modèle soit en posant les cartes sur le modèle soit à côté de celui-ci. Enfin, dans la quatrième situation l'élève dispose d'une réglette modèle – orientée implicitement par une forme triangulaire représentant la tête d'un poisson clairement identifiée par des yeux et une bouche –, dans laquelle sont encastrés sur de petites tiges des jetons de couleurs et de formes variées. Il doit reproduire la succession des jetons sur sa propre réglette.

Toutes ses situations sont relatives au même type de tâches : reproduire une position dans une liste. Notons cependant que, pour les auteurs de l'ouvrage, si les deux premières situations ont pour objectif d'apprentissage affiché le repérage dans l'espace, les deux suivantes – avec les cartes et les jetons – ont pour objectif de « développer sa pensée logique ». Néanmoins, dans tous les cas, la rubrique « s'approprier le langage » mentionne bien comme premier item « indiquer une position ». Dans aucune de ces situations le nombre comme mémoire de la position n'est requis.

Plusieurs caractéristiques du milieu de ces situations rendent inutile l'usage du nombre. Le faible nombre de places représentées par les cartons (situation 1), les chaises (situation 2), les wagons (situation 3), les tiges d'encastrement sur la réglette (situation 4), permet un repérage spatial : devant (« à la place du chauffeur »), juste après celui qui est devant (« derrière le chauffeur »), juste avant celui qui est derrière, derrière (« au bout du train »). Les objets à placer sont tous distincts et permettent le repérage des places en nommant les personnages (situations 1 à 3) ou les formes et les couleurs (situations 3 et 4). Ainsi la mémorisation d'une petite litanie « poupée bleue-poupée blanche-ourson-clown » permet aisément de placer chacun des personnages en faisant une correspondance terme à terme entre le nom du personnage de la chansonnette et la chaise où l'asseoir. Le repérage relatif est d'ailleurs tout aussi aisé en utilisant le vocabulaire spatial et le nom des objets à placer : le clown est derrière l'ourson ; la locomotive jaune est avant la locomotive verte ; le carré vert est entre le triangle bleu et le rond jaune. Enfin, l'ordre est donné : la locomotive dit le sens de la marche et la tête du poisson est un point de repère.

En résumé, tel qu'il apparait à la lecture des textes officiels, le rapport institutionnel au nombre entier pour repérer une position renvoie à une « liste ordonnée » en maternelle ou dans une « collection organisée » d'objets au cycle 2 et sur une droite graduée aux cycles 2 et 3. Le déplacement apparaît alors comme une praxéologie de référence pour définir l'ordre qui signe la constitution d'une liste. C'est ainsi que bandes numériques et pistes sur lesquelles un pion se déplace sont les ostensifs associés au nombre ordinal. Au travers de l'exemple d'une séquence d'enseignement, tout à fait représentative des situations d'enseignement de l'école maternelle (telles que nous les observons dans le cadre de notre activité de formatrices d'enseignants), il apparait que les éléments apportés par les textes officiels sont insuffisants à définir les praxéologies qui requièrent l'usage du nombre ordinal. Utiliser une liste ordonnée ou une collection d'objets organisée pour repérer une position n'est pas une condition suffisante à l'usage du nombre ordinal.

Nous ne poursuivrons pas davantage cette exploration – qui ne se voulait pas exhaustive – tant les premiers éléments recueillis donnent une idée de ce que sont les praxéologies scolaires sur le nombre ordinal. Notre question de recherche portant sur la mise à jour des connaissances des élèves en fin d'école maternelle sur le nombre ordinal, une réponse méthodologique est l'étude des praxéologies mathématiques mises en œuvre au cours de situations dans lesquelles le recours au nombre ordinal est la technique la plus efficace. C'est ainsi que nous avons été amenées à concevoir une ingénierie didactique.

UNE SITUATION FONDAMENTALE DE L'ORDINAL

Il ne s'agissait pas pour nous de faire un état des lieux des connaissances des élèves sur le nombre ordinal en fin de maternelle, ce que nous aurions pu réaliser au travers d'une enquête quantitative. Nous nous sommes intéressées à l'étude des conditions de la construction de ces connaissances à l'école maternelle, tant du point de vue des élèves que du point de vue des professeurs. Pour ce faire, le premier geste du chercheur est de caractériser son objet d'étude, ici, le nombre ordinal.

La théorie des situations didactiques et la théorie anthropologique du didactique modélisent les savoirs par ce qu'ils permettent de faire :

> « (…) les connaissances mathématiques ne peuvent s'appréhender qu'à travers les activités qu'elles permettent de réaliser, et donc les problèmes qu'elles permettent de résoudre. *Les mathématiques ne sont pas simplement un système conceptuel, logiquement consistant et producteur de démonstrations* : elles sont en premier lieu une activité qui se réalise en situation et *contre* un milieu. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 81, en italiques dans le texte).

C'est ainsi que Chevallard (1997b) utilise le modèle des praxéologies et Brousseau celui des situations fondamentales en postulant : « Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale » (Brousseau, 1986, p. 49).

S'inscrivant dans cette double affiliation, nous sommes ainsi conduites à devoir étudier trois grandes questions :

- Comment traduire en termes de situations, et donc de connaissances, les principales caractéristiques de cet objet de savoir ?
- Quel type de tâches permet d'appréhender sa raison d'être, de le faire apparaître comme une nécessité ?
- Quel type de situations conduit à son utilisation et à sa construction comme connaissance utile ?

1. Praxéologies du repérage : origine et orientation

Afin de construire un modèle épistémologique de référence, le premier geste du didacticien consiste à explorer les praxéologies existantes qui mettent en œuvre l'objet de savoir étudié. Considérons le cas de deux rangées d'enfants. Comment s'assurer que Leïla et Théo occupent la même position chacun dans leur rangée ? Chaque enfant d'une rangée en donnant la main à un enfant de l'autre rangée opère une mise en correspondance terme à terme. Cet appariement permet de valider que les positions de Leïla et Théo sont identiques dans leur rangée respective. La mise en correspondance biunivoque entre les éléments de la liste apparait ainsi comme un moyen de définir en acte la relation « être dans la même position » entre deux éléments de deux listes distinctes.

Cependant, cet appariement ne se réalise pas « n'importe comment », mais dans un certain ordre, qui dans le cas des enfants se donnant la main, est celui de la marche. Lorsqu'un professeur énumère la liste de ses élèves : Anaïs, Bétul, Chloé, … ; qu'un élève déclare que la lettre « i » est la quatrième lettre du mot *cerise* ou que le journaliste déclare que le coureur en maillot rouge est arrivé deuxième de la course, le point de départ et le sens de parcours sont donnés implicitement par l'ordre de l'énonciation des prénoms, le sens de la lecture ou du franchissement de la ligne d'arrivée. Dans chacun des cas évoqués le premier élément de la liste est clairement identifié comme étant celui par quoi commence la liste : il y a un prénom qui est énoncé avant les autres, une lettre qui est lue avant les autres, un coureur qui passe la ligne d'arrivée avant les autres. La liste des prénoms, des lettres ou des coureurs est déjà constituée, d'emblée là et parcourue depuis son origine mais ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, par exemple, alors que la lettre « F » est la sixième lettre de l'alphabet, elle est la quatrième consonne. La position d'un même objet dépend bien de l'origine du repère, et ici de la liste : la liste des consonnes est une sous-liste de la liste des lettres de l'alphabet et si le sens de parcours est conservé, les points d'où l'on part pour parcourir ces deux listes ne coïncident pas. Si nous avions pris comme liste : a, b, c, d, e, f, G, H, i, J, k, l, M, N, O, la position de la lettre f aurait été la même dans la liste des lettres et dans la liste des minuscules pourtant les deux listes sont distinctes. De la même manière, le sens de parcours de la liste n'est pas toujours donné. Comment déterminer, par exemple, quel est la deuxième forme à partir du soleil dans un ensemble de formes différentes dessinées sur une bande de papier comme sur la figure2 ?

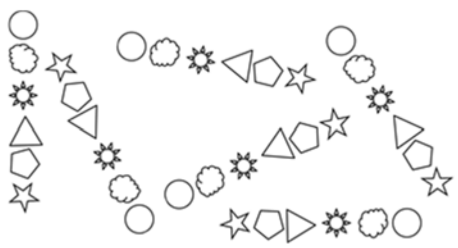

Figure 2. *–lignes de formes*

Ces différents exemples de situations permettent d'appréhender que le repérage d'une position au sein d'une liste se détermine par la donnée d'un sens de parcours de la liste – une orientation – et d'un point de départ – une origine – sans que ces éléments constitutifs d'un système de repérage ne soient toujours explicitement identifiés.

Revenons à présent sur notre exemple inaugural de la position d'une lettre dans la liste A, Z, E, R, T, Y. Plutôt que de considérer ces lettres comme étant rangées par le sens de la lecture, regardons chacune d'elle de manière autonome. Nous n'avons plus alors une liste mais un ensemble qu'il est possible de représenter indifféremment {A, Z, E, R, T, Y} ou {T, E, Z, R, A, Y}. Chacun des éléments qui constitue cet ensemble peut être apparié à un mot-nombre de la comptine numérique, dans n'importe quel ordre en quelque sorte : R → « un », Y → « deux », A → « trois », E → « quatre », T → « cinq », Z → « six » ou A → « un », Z → « deux », R → « trois », E → « quatre », T → « cinq », Y → « six ». Indépendamment des appariements qui seront réalisés, dès lors que toutes les lettres auront été appariées une et une seule fois avec un mot-nombre de la comptine numérique, ce sont toujours les mêmes mots-nombres qui seront utilisés. La comptine numérique étant immuable, elle sera, à chaque fois, énoncée jusqu'au mot-nombre « six ». C'est ainsi qu'il est toujours possible de définir une bijection entre les ensembles {A, Z, E, R, T, Y} et {1, 2, 3, 4, 5, 6} et de déclarer ces deux ensembles équipotents, c'est-à-dire de même quantité, résumée par le nombre 6.

Ainsi nombre cardinal et nombre ordinal peuvent-ils être définis comme l'expression de la mémoire respectivement de la quantité – d'éléments dans un ensemble – ou de la position – d'un élément singulier au sein d'une liste. C'est cette dualité que nous allons à présent explorer.

2. Dualité nombre cardinal-nombre ordinal

Ce qui tisse le lien entre nombre cardinal et nombre ordinal, c'est l'appariement biunivoque des éléments d'une liste ou d'un ensemble avec la comptine numérique.

Lorsque le quatrième coureur de la course finit sa course, trois coureurs l'ont précédé mais ce sont bien quatre coureurs qui ont passé la ligne d'arrivée. Pour déterminer que la lettre « i » est la quatrième lettre du mot *cerise* il est nécessaire de passer en revue toutes les positions des lettres jusqu'à atteindre celle de la lettre « i ». De manière générale, si un objet est en position *n* dans une liste, il est nécessaire de passer en revue *n* éléments de la liste pour atteindre cette *n-ième* position depuis l'origine du repère. Le nombre qui représente la position dans la liste est le nombre qui représente la quantité de places successivement occupées avant d'atteindre cette position. Le numéro de la case, sur une piste par exemple, n'est autre que le nombre de cases à parcourir pour rejoindre sa position.

Le passage du nombre cardinal à l'ordinal passe par la constitution d'un ensemble d'éléments en liste. Or le parcours réalisé pour énumérer tous les éléments d'un ensemble transforme cet ensemble en liste par l'ordre que le parcours institue (figure 3).

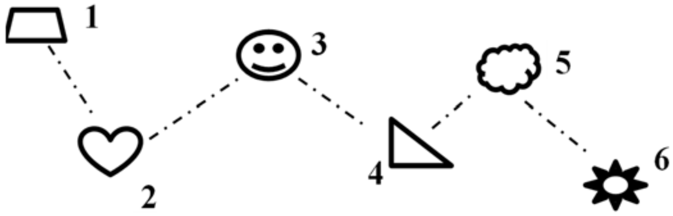

Figure 3. *– parcours d'un ensemble d'objet en vue du dénombrement*

Pour dénombrer les objets, chacun d'eux est passé en revue une et une seule fois et la liste se crée alors en acte : trapèze, cœur, tête, triangle, nuage, soleil. Le soleil est en sixième position dans cette liste constituée de six éléments. Le nombre cardinal qui exprime la quantité d'objets de la collection correspond au nombre ordinal qui exprime la position du dernier objet dans la liste.

Contrairement à ce que pourraient laisser penser les programmes d'enseignement – où le nombre cardinal est omniprésent – et le développement précédent, la relation entre cardinal et ordinal n'est pas unilatérale mais bien duale comme le démontre Couturat (1896, p. 305) :

> « Imaginons une suite simplement infinie de chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … c'est-à-dire un ensemble de signes tels qu'il y en ait un qui soit le premier de tous (1), et qu'à chacun d'eux en corresponde un autre déterminé qui le suit immédiatement : on dira que nous avons construit un système de nombres ordinaux.
> Il faut bien remarquer que ces signes n'ont pas d'autre sens que celui qui résulte de la définition précédente; autrement dit, chacun d'eux, 5 par exemple, n'a pas d'autre propriété que de suivre immédiatement un signe déterminé (4) et d'être immédiatement suivi par un autre signe déterminé (6). […] On appelle suite naturelle des nombres entiers l'ensemble de ces signes rangés dans cet ordre. […] Étant donnée une collection d'objets bien distincts, on les fait correspondre un à un aux nombres consécutifs, à partir de 1; autrement dit, on leur applique chacun à chacun les numéros d'ordre successifs: 1, 2, 3, 4, 5, … sans en omettre ni répéter aucun.
> Le dernier des nombres ordinaux ainsi employé, n, se nomme le nombre cardinal de la collection donnée, ou le nombre des objets donnés; et l'on dit que la collection se compose de n objets. Cette opération s'appelle dénombrement; elle consiste à compter les objets. »

La comptine numérique nait donc du besoin de recourir à une liste ordonnée et immuable pour dénombrer, repérer. La quantité caractérise une collection, un ensemble d'objets et le dénombrement permet d'associer le nombre cardinal à une collection. La position caractérise un élément d'une liste et le repérage permet de lui associer le nombre ordinal (figure 4).

Collection $\longrightarrow$ Quantité $\xrightarrow{\textit{Dénombrement}}$ Nombre cardinal

Liste $\longrightarrow$ Position $\xrightarrow{\textit{Repérage}}$ Nombre ordinal

Figure 4. *– Quantité et position*

Ainsi, le nombre ordinal est à la position d'un élément dans une liste ce que le nombre cardinal est à la quantité d'une collection par le truchement de la correspondance biunivoque avec la comptine numérique.

L'exploration des pratiques sociales du repérage et les éléments épistémologiques recueillis nous permettent à présent d'envisager les critères essentiels pour l'élaboration d'une situation fondamentale de l'ordinal. En premier lieu, il y a le besoin de mémorisation de la position. Or ce qui rend nécessaire la mémorisation est la mise à distance, dans l'espace ou dans le temps. Nous avons vu par ailleurs que si les éléments de la liste étaient tous distincts, il était possible d'éviter le recours au nombre. Ceci conduit à établir un second critère, rendre discernable un élément dans une liste par sa seule position. Un troisième critère est à considérer en lien avec ce qui fonde toute activité mathématique, la capacité à anticiper le résultat d'une action – il n'est pas nécessaire par exemple de recompter les billes dans un chapeau pour savoir qu'en mettant deux billes puis trois billes, il y en aura cinq au final. Ceci conduit à contraindre l'action en ne pouvant la réaliser qu'une seule fois.

Ces trois éléments, essentiels dans l'usage du nombre comme réponse optimale à un problème de repérage d'une position dans une liste, nous amènent à proposer ainsi comme situation fondamentale de l'ordinal : *La reproduction à distance, en une fois, d'une liste composée d'objets tous identiques sauf un***.**

Une telle situation n'est évidemment pas sans rappeler ce qu'a proposé Brousseau (1995) comme situation fondamentale du dénombrement, la construction d'une collection équipotente à une collection donnée en une fois et à distance :

> « Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un seul dans chaque pot. Tu dois apporter tous les pinceaux en un coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les ramènes là-bas et tu essaies à nouveau. » (*op. cit.* p.831)

Comme le souligne Brousseau (1998b), une situation fondamentale

> « C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner ». (*op. cit.* p.3)

C'est, parce qu'elle est un modèle épistémologique de référence que la recherche d'une situation fondamentale peut soutenir la conception d'une ingénierie didactique.

UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR LA RECHERCHE

La conception d'une ingénierie didactique repose sur la détermination duale d'une organisation mathématique et d'une organisation didactique qui la fasse vivre. Celle que nous avons conçue doit permette de construire le nombre ordinal comme mémoire de la position, elle est donc une instanciation, par le choix d'un milieu adapté, de la situation fondamentale de l'ordinal que nous venons de définir. Mais, s'agissant d'une ingénierie de recherche expérimentée dans le cadre d'un enseignement, il était indispensable de penser corrélativement son organisation didactique comme condition économique de l'organisation mathématique et comme condition pratique d'observation des praxéologies mises en œuvre.

1. Une ingénierie didactique pour la recherche : créer les conditions de l'étude

Nous utilisons l'ingénierie comme une phénoménotechnique, elle est une condition de l'étude des connaissances des élèves sur l'ordinal dans un contexte d'enseignement à l'école maternelle. Ceci conduit à définir des critères permettant de déterminer un milieu adapté qui reprennent les différents éléments d'analyse précédents.

Critère 1 : la correspondance terme à terme comme définition en acte de la relation « même position ».

Critère 2 : nature des objets formant une liste : des objets identiques.

Critère 3 : rendre nécessaire la construction d'un repère.

Critère 4 : rendre explicite la dualité entre cardinal et ordinal.

Critère 5 : s'écarter du modèle dominant de la bande ou de la piste qui masque les savoirs par la naturalisation des praxéologies scolaires.

Critère 6 : faire évoluer les contraintes sur le milieu comme moteur de l'évolution des praxéologies.

Les deux premiers critères sont relatifs aux conditions d'émergence du concept d'ordinal. Le critère 1 permet la construction du concept de position comme une caractéristique d'identification d'un élément au sein d'une liste tandis que le critère 2 rend optimal le recours au nombre en absence de tout autre critère (en particulier spatial). Les deux critères suivants sont relatifs à notre objet d'étude, l'identification des connaissances des élèves sur l'ordinal. L'existence d'un repère – donnée d'une orientation et d'une origine – est un préalable au repérage, rendre nécessaire sa construction par le critère 3 permet de révéler l'identification par le sujet de cette nécessité. Remarquons que dans le cas d'une liste finie, choisir une des extrémités de la liste pour origine définit implicitement l'orientation. Le critère 4 est utile pour identifier comment l'omniprésence du cardinal à l'école empêche – ou non – l'émergence de l'ordinal ou la reconnaissance de l'enjeu de repérage et quelle relation se noue, dans la situation, entre ces deux aspects du nombre. Le critère 5 prend en charge la spécificité institutionnelle de l'école française révélée par l'étude des programmes scolaires qui associent à l'ordinal certains ostensifs comme la bande ou la piste. Le dernier critère est une condition sur l'organisation didactique qui vise l'émergence de l'ordinal dans un continuum depuis la construction du concept de position. Ce dernier critère est aussi lié à la raison d'être de l'ingénierie : il s'agit de créer les conditions de l'observation des connaissances des élèves. En faisant évoluer les praxéologies, nous pouvons observer comment les connaissances se construisent.

Considérons deux sacs contenant chacun neuf perles blanches et une perle noire. Les contenus de ces deux sacs sont identiques du point de vue de la quantité et de la composition. Rien ne permet alors de les distinguer. Prenons un fil avec un nœud et passons ces perles sur le fil. Nous avons neuf chances sur dix pour obtenir deux « colliers » distincts (figure 5).

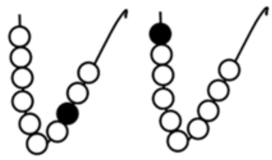

Figure 5. *– deux colliers distincts*

La position de la perle noire associe l'ordre et l'espace par un sens de parcours sur le fil. Il y a là une différence essentielle avec les situations d'enseignement dans le contexte du train ou du poisson : les places ne sont pas « déjà là ». Cartons, chaises, cartes, tiges d'encastrement représentent et matérialisent les positions, indépendamment des objets qui y trouveront place. Ici, c'est l'existence de la perle qui constitue la position. Dans le cas des perles, deux positions sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même place. L'ingénierie didactique que nous avons conçue repose sur la situation fondamentale de l'ordinal dans le milieu des colliers. Il s'agit de reproduire « un collier » modèle avec un fil contenant un nœud à l'extrémité et le nombre exact de perles nécessaires, toutes identiques, avec une d'entre elle discernable par la couleur.

Au-delà de l'étude des connaissances des élèves, nous avons souhaité comprendre l'effet de l'adidacticité des situations comme condition de dévolution de la construction du savoir, aussi nous devions créer les conditions qui rendent tenable pour les professeurs la position de neutralité que nous souhaitions leur imposer lors des phases de conclusion et de validation. Ceci nous a contraintes à différer l'institutionnalisation et à penser à l'organisation des rétroactions du milieu.

2. L'ingénierie didactique : des situations d'action aux situations de formulation

L'organisation didactique s'est structurée autour de deux « temps » : une situation d'action et trois situations de formulation (au sens de Brousseau, 1998a) suivant une organisation didactique analogue à celle utilisée pour le nombre cardinal (Margolinas & Wozniak, 2012). Elle s'est conclue par une évaluation individuelle reprenant chacun des types de tâches réalisés par les élèves au cours de la séquence que nous présentons ici de façon synthétique :

Phase 1 : construction libre de colliers puis comparaison.
Phase 2 : reproduction d'un collier modèle à proximité.
Phase 3 : formulation avec éloignement dans l'espace.
Phase 4 : formulation avec éloignement dans le temps.
Phase 5 : formulation à autrui.
Phase 6 : évaluation individuelle.

La première phase vise à installer le milieu : les élèves découvrent le matériel des perles et du fil sur lequel ils doivent les passer ; les règles du « jeu » – c'est-à-dire ce qu'il est possible de faire ou de ne pas faire – ; ce qui est attendu. Un vocabulaire commun est institutionnalisé – « colliers identiques » ; « place » ; « position » ; « endroit » ; « rang » – qui permet de construire une langue commune pour rendre compte de ce qui est construit et appris collectivement. Le procédé de correspondance terme à terme – nœud et perle colorée alignés – pour comparer la position de la perle colorée sur deux colliers est introduit. Cette première phase permet ainsi la dévolution du type de tâche qui sera étudié tout au long de la séquence : reproduire un collier modèle. Les élèves découvrent alors au cours de la seconde phase l'enjeu de la situation. La correspondance terme à terme, qui dans la phase précédente était conçue comme un procédé de comparaison, change de statut pour devenir un procédé de validation de la tâche à accomplir. Ces deux premières phases contribuent ainsi à construire le concept de position, tandis que les trois phases suivantes conduisent à construire celui d'ordinal. Dans la troisième phase, le collier modèle est éloigné du lieu où le matériel est disponible pour le reproduire, ce qui conduit les élèves à trouver un moyen de mémoriser la position de la perle colorée, et qui constitue une première formulation (éventuellement implicite). L'éloignement dans le temps en phase 4 conduit à la production de messages écrits. La phase 5 est organisée en trois temps : dans un premier temps les élèves jouent alternativement le rôle d'émetteur et de récepteur d'un message qui vise à permettre la reproduction d'un collier modèle. La validation est ensuite réalisée selon la technique de mise en correspondance terme à terme des perles des colliers. Le troisième temps est consacré à l'institutionnalisation de la technique de repérage de la perle colorée : pour réussir à repérer la perle colorée, trois informations sont nécessaires : deux informations pour construire un système de repérage – l'origine et l'orientation du collier –, une information sur le repère de la position de la perle colorée par rapport à l'origine.

La sixième et dernière phase est celle de l'évaluation qui se réalise par l'accomplissement de trois types de tâches : retrouver parmi plusieurs un collier identique à un modèle donné avec éloignement dans l'espace, en un seul déplacement ; concevoir un message (pour soi ou pour autrui) pour reproduire un collier modèle ; retrouver parmi plusieurs « le collier dans lequel la perle colorée est en septième position à partir du nœud ».

3. Les conditions d'expérimentation et d'observation

En juin 2012, nous avons demandé à deux professeures expérimentées volontaires, maître-formatrices (que nous nommons ici Aline et Béatrice), de réaliser l'ingénierie des colliers dans leurs classes de maternelle grande section – dernière année de l'école maternelle, les élèves ont entre 5 et 6 ans –, en respectant des consignes très précises concernant leur rôle : en particulier, elles ne devaient pas intervenir auprès des élèves et influencer le moins possible leurs recherches de procédures de résolution des différents problèmes posés. Nous voulions en effet comprendre l'effet des situations sur les connaissances des élèves (Margolinas & Wozniak, 2014).

En 2012-2013, nous avons réalisé des entretiens avec ces deux enseignantes qui portaient sur les prolongements qu'elles avaient mis ou non en place suite à leur expérience durant l'ingénierie. Dans la classe d'Aline quelques observations ont été faites et une évaluation finale individuelle a été réalisée.

En 2013, un protocole de recherche a été mis en place avec un professeur des écoles moins expérimenté (5 ans d'ancienneté) et volontaire, que nous nommerons, Claude. Dans un premier temps, les pratiques ordinaires de cet enseignant ont été observées pendant sept demi-journées. Ayant constaté que le nombre comme mémoire de la position n'était pas présent dans son enseignement d'après les observations en classe, l'analyse des travaux d'élèves au cours de l'année et ses déclarations, une piste d'évolution de son enseignement lui a été proposée. L'ingénierie des colliers lui a été présentée rapidement, durant une heure, ainsi que les résultats obtenus (voir ci-dessous). Claude était alors libre de construire ou non un enseignement à partir des ressources fournies, à sa guise. Ce professeur ayant choisi de concevoir une séquence d'enseignement sur l'ordinal, les sept séances correspondantes ont été observées dans au moins un groupe d'atelier. Claude pouvait interagir ponctuellement avec le chercheur pour poser des questions sur le déroulement et les procédures des élèves, ces interactions ont été systématiquement enregistrées.

ÉTUDE DES CONNAISSANCES : LES ELEVES

Éléments d'analyse a priori

Dans toutes les situations de l'ingénierie, les élèves disposent d'un collier modèle composé de neuf perles « neutres » et d'une perle colorée (figure 6) qu'ils doivent refaire à l'identique à l'aide d'un fil déjà noué, de neuf perles neutres et d'une perle colorée[2]. Ils doivent donc se souvenir ou communiquer la position de la perle colorée par différents moyens suivant les variables des situations exposées plus haut.

[2] Nous appelons ici « neutres » les neuf perles identiques et « colorée » la perle dont la couleur diffère des autres. Dans les différentes expérimentations, les couleurs des perles « neutres » et « colorées » diffèrent, mais sont toujours bien distinctes.

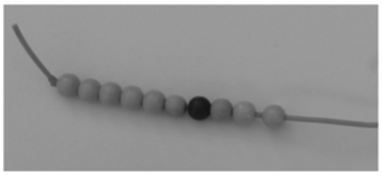

Figure 6. *– un collier 7, perle colorée en 7e position par rapport au nœud*

Sans entrer dans les détails situation par situation, voyons comment la position peut être décrite *a priori*.

A l'oral, la position de la perle colorée peut être donnée par le nombre ordinal correspondant au repère choisi : par exemple sur la figure 6, on peut dire « la perle colorée est dans la septième position à partir du nœud ». Il est également possible de donner le cardinal des perles neutres avant la perle colorée et dire « il faut mettre six perles neutres et juste après la perle colorée et enfiler ensuite les perles neutre qui restent ».

A l'écrit, deux types de solutions sont envisageables : dessiner ou écrire des nombres.

Pour être efficace, un dessin doit expliciter le repère utilisé et la position de la perle colorée, c'est-à-dire donner une représentation du nœud ou du bout du collier et distinguer une perle par rapport à l'origine choisie, sachant que sur les supports utilisés (des feuilles blanches), aucune indication ne donnait d'orientation particulière à la feuille.

Avec une écriture chiffrée, il est possible d'écrire l'ordinal correspondant à la position choisie, soit « 7 » soit « 7e », la deuxième solution étant moins ambigüe que la première. Mais il est également possible de désigner les quantités de perles dans l'ordre de l'écriture ce qui, pour la figure 6, correspondrait à « 6 1 3 », ce que nous avons appelé une « quantité orientée » (Margolinas & Wozniak, 2014).

Résultats de l'expérimentation de juin 2012

Tous les élèves considèrent que les colliers qui ne se distinguent que par la position de la perle colorée sont bien différents. Ils perçoivent donc les différences de position. Ils acceptent tous sans difficulté la correspondance terme à terme des perles comme étant un moyen permettant de valider l'identité des colliers : le nœud avec le nœud puis une perle neutre avec une perle neutre, etc. Ils peuvent donc établir une relation avec le milieu prévu dans l'ingénierie.

Au cours des premières phases qui permettent d'entrer dans la situation, les élèves décrivent les colliers pour exprimer la reconnaissance de différence entre les colliers ou la construction d'un collier identique à un modèle posé devant soit. Ils utilisent alors spontanément un vocabulaire ordinal limité, même si tous semblent connaître les mots « premier » et « dernier ». Certains élèves utilisent d'autres ordinaux comme Alex qui parle de « deuxième perle », par exemple, cependant aucun élève ne reprend cette dénomination.

A l'écrit, dès la situation de formulation avec éloignement dans le temps, les élèves produisent spontanément des dessins, parfois associés à des écritures chiffrées (classe de Béatrice, nommée classe B par la suite). Dans la classe d'Aline (classe A), nous avons exigé des écritures chiffrées dans une phase supplémentaire (phase 6), dans laquelle nous avons demandé à nouveau une auto-formulation avec éloignement dans le temps en imposant d'utiliser seulement des chiffres. Nous allons passer en revue le type d'écrits produits (pour une analyse plus détaillée comportant des éléments quantitatifs, voir Margolinas & Wozniak, 2014).

Quelques rares dessins ne peuvent pas être interprétés comme des dessins fonctionnels. C'est le cas de celui de Sanaa (figure 7) qui dessine un collier qui n'est ni réaliste par rapport au collier modèle (couleur neutre beige, perle colorée verte) ni fonctionnel pour reproduire le collier le lendemain.

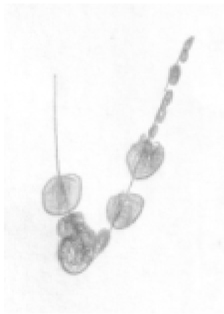

Figure 7. *– Sanaa, phase 4, collier 8. Certaines perles sont roses (une grosse et plusieurs petites), d’autres perles sont violettes.*

Dans les premières représentations écrites, de nombreux élèves produisent au départ (phase 4) un dessin non orienté : pas de trace d’une origine ou d’une orientation, dont une position au moins (en tournant la feuille) correspond au collier modèle (figure 8).

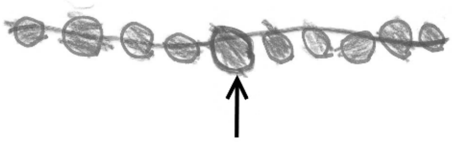

Figure 8. *– Melvin, phase 4, collier 6. La flèche, ajoutée par nous, indique la perle distinguée.*

Cependant, les interactions avec le milieu permettent à de nombreux élèves de produire un dessin complet qui comporte une origine et donc un repère implicite (figure 9, figure 10).

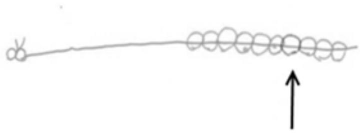

Figure 9. *– : Eliot, phase 5, collier 7*

Il ne s’agit pas d’une copie du réel, comme le montre clairement le dessin de Kanaë (figure 10, le collier modèle a pour perles neutres du bois naturel et une perle colorée bleue !).

Figure 10. *– Kanaë, phase 4, collier 5*

Certains élèves utilisent spontanément des écritures chiffrées, soit en accompagnement d’un dessin (figure 11), soit, pour deux élèves de la classe B, sans dessin (figure 12).

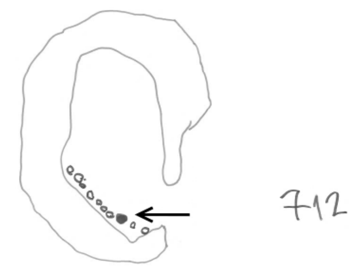

Figure 11. *– Melis, phase 4, collier 3. La perle distinguée est verte, comme sur le modèle et le chiffre 1 est vert.*	***Figure 12.*** *– Aymen, phase 4, collier 6. Le chiffre 1 (écrit à l'envers, ce qui est courant à cet âge) est vert, comme la perle colorée du modèle.*

Les écritures fonctionnelles produites par les élèves sont presque toutes des écritures correspondant à des cardinaux, orientées implicitement par l'écriture, ce que nous avons appelé des « quantités orientées », comme c'est le cas d'Aymen qui écrit 5 1 4 pour un collier dans lequel la perle colorée est en sixième position. L'orientation est donnée par le sens de l'écriture, mais le nombre ordinal est absent.

Cependant, quelques rares élèves produisent des écrits correspondant à des ordinaux. Dès la phase 4, Valmir (figure 13) utilise la suite des nombres pour mettre en valeur le nombre 6 pour un collier dans lequel la perle colorée est en sixième position en partant du nœud. Lors de la phase 6, Eva trouve une solution similaire (figure 14).

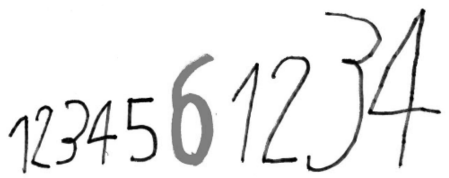

Figure 13. *– Valmir, phase 4, collier 6. Le chiffre 6 est écrit en rouge.*

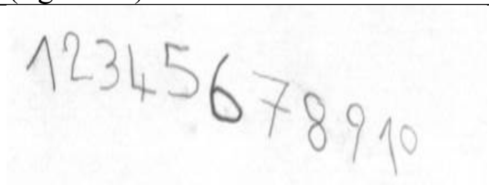

Figure 14. *– Eva, phase 6, collier 6.*

Quant à elle, Manon mêle nombre cardinal et nombre ordinal : lors de l'évaluation, elle écrit 4 5 5 et explique « d'abord il y a quatre blanches, elle est en cinquième, et après il y a cinq perles blanches.

L'évolution d'un élève faible, Noah, montre une évolution importante de la séquence. Dans les premières phases (4 et 5) il produit des dessins non fonctionnels, le second étant cependant plus réaliste (dans le premier il y a quelques perles dessinées alors que dans le second il y a dix perles sur un fil, sans orientation ni de perle distinguée, figure 15). S'agissant d'une situation de communication à autrui, Noah est confronté à la réaction d'Eliot qui refuse de construire un collier en argumentant qu'il n'a pas les informations pour le faire, de plus Noah doit lire le dessin d'Eliot (figure 9) qui indique clairement le nœud et la perle distinguée. Noah ne réussit pas à interpréter complètement le dessin d'Eliot puisqu'il construit le collier inverse : 6 au lieu de 5. Cependant, lors de la phase suivante (éloignement dans le temps avec obligation d'utiliser des chiffres) Noah produit une écriture de quantité orientée qui correspond bien au collier modèle proposée (4213 pour le collier 7, ce qui peut bien se lire comme une écriture équivalente à la quantité orientée 613). Lors de l'évaluation (figure 16), Noah réussit à produire un dessin qui représente bien la perle distinguée dans le repère.

figure 2 : Noah, phase 4, collier 8.

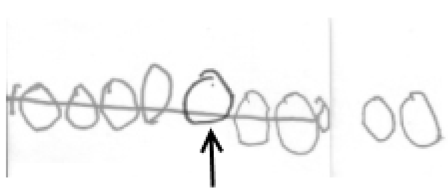

figure 3 : Noah, évaluation, collier 5. Noah a eu besoin de deux feuilles car le dessin des perles était trop gros.

En conclusion, les situations adidactiques prévues lors de l'ingénierie nous conduisent à affirmer que les interactions avec le milieu permettent de construire ce nous avons appelé « la quantité orientée » :

- Dessins avec une origine intrinsèque au collier (nœud ou bout) et les bonnes quantités de perles par rapport à cette origine, l'orientation étant alors donnée implicitement
- Ecrits chiffrés orientés implicitement par le sens de l'écriture, sans origine explicite.

Il s'agit bien de la construction d'une nouvelle connaissance, car il y a une évolution au cours des situations. Cependant, le principe de l'économie du nombre ordinal n'est pas éprouvé dans ces situations, ce qui peut être dû à un manque d'institutionnalisation de la part du professeur – rappelons que dans le cadre de notre recherche nous avions explicitement demandé aux professeurs de rester en retrait et de ne faire une institutionnalisation qu'à la fin de la phase 5.

Résultat des observations de 2013

En 2012-2013, deux professeurs, Aline et Claude ont construit et conduit à leur manière, indépendamment, deux séquences basées sur leur connaissance de l'ingénierie des colliers, qu'Aline avait vécue en juin 2012 alors que Claude avait été seulement mis au courant des différentes situations et des résultats ci-dessus.

Un enseignement de la suite orale des nombres ordinaux ayant été révélé comme nécessaire en juin 2012, les deux professeurs ont enseigné cette suite aux élèves pour désigner des positions, dans différents contextes. Dans la classe d'Aline, certains élèves se sont mis fugitivement à dire « unième » pour « premier » (terme qu'ils connaissaient par ailleurs), ce qui semble confirmer que le terme « premier » n'avait pas de sens ordinal auparavant, ce qui est cohérent avec nos constatations de juin 2012.

Les représentations de type « quantité orientée » sont présentes dans les deux classes, cependant elles évoluent vers l'usage du nombre ordinal, surtout dans la classe d'Aline dans laquelle cet usage se banalise pour de nombreux enfants (dans la figure 17 Tessa fait un joli dessin et, à la fin écrit 6 et déclare « Je mets le 6 pour dire que la perle elle est en sixième position »).

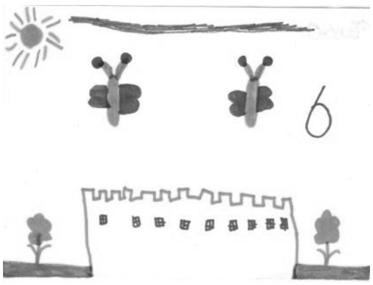

Figure 17. *– Le dessin de Tessa (avec de très jolies couleurs)*

Le nombre ordinal est donc enseignable : dans les deux classes, les élèves parviennent très majoritairement à nommer la position de la perle grâce au nombre ordinal (figure 18) alors qu'ils produisent les mêmes écrits qu'en 2012, surtout dans les premières phases.

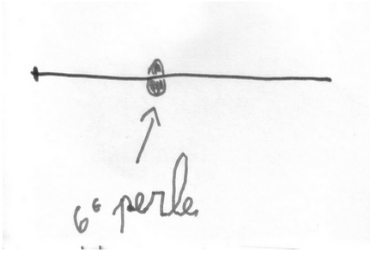

Figure 18. *– message de Malo (le mot « perle » est dicté à sa demande par l'adulte)*

Conclusion sur les connaissances des élèves

Le nombre n'est connu par les élèves que comme une désignation d'une quantité, cependant, cela ne suffit pas tout à fait pour désigner les positions. De fait, dans une ingénierie didactique basée sur une suite de situations adidactiques d'action et de formulation, sans institutionnalisation, les élèves utilisent des quantités ordonnées par l'écriture qui « court-circuitent » l'ordinal : ils combinent deux connaissances acquises (ou en cours d'acquisition) : l'ordre de l'écrit et l'écriture des quantités.

Cependant, l'enseignement de l'ordinal comme mémoire de la position est possible si le professeur intervient pour nommer les nombres ordinaux et pour donner la convention d'écriture (4e) qui permet de lever l'ambiguïté avec la quantité, en s'appuyant sur les situations adidactiques qui donnent un sens à la mémoire de la position.

ÉTUDE DES CONNAISSANCES : LES PROFESSEURS

En juin 2012 Aline et Béatrice ont accepté de mettre en œuvre notre ingénierie au plus près de nos indications précises, en se mettant en retrait pour laisser jouer les situations et en institutionnalisant seulement dans une dernière phase. Durant l'année scolaire 2012- 2013, elles étaient libres de se servir ou non des situations expérimentées et nous ont tenues au courant de leurs adaptations, de façon informelle. De plus, nous avons pu également observer Claude suivant un nouveau protocole de recherche utilisant l'ingénierie didactique.

Reprise de la séquence chez les professeurs observés

L'ingénierie de recherche proposée par le chercheur crée une institution qui légitime l'ordinal comme savoir à enseigner et autorise le professeur à faire la dévolution d'une connaissance à l'élève.

Seule Aline a construit, à partir de l'année 2012-2013, un enseignement du repérage qui inclut le nombre ordinal. En effet, alors qu'elle était persuadée que les problèmes posés aux élèves dans l'ingénierie seraient faciles pour eux, elle a découvert que son enseignement du nombre cardinal ne permettait pas aux élèves de construire le nombre comme repère de la position. Elle a également découvert qu'il était possible aux élèves de cet âge de commencer à construire un repère : origine, sens, ce qu'elle a réinvesti à la fois dans un enseignement spécifique mais aussi dans d'autres aspects de son travail (par exemple, elle s'est mise à appeler « ligne zéro » la ligne de base de l'écriture).

Béatrice trouve l'ingénierie intéressante pour chercher et manipuler, mais elle considère qu'on peut aller plus vite pour le nombre ordinal (qu'elle ne considère que sous l'angle de l'apprentissage du vocabulaire de la suite orale des nombres ordinaux). Elle n'a pas compris l'importance du repère (origine, orientation). En 2012-2013, elle ne reprend pas l'ingénierie, mais seulement le matériel des perles, qui servent comme nouveau matériel pour désigner des cardinaux (ranger des colliers suivant leur nombre de perles total).

Claude, dans l'entretien final, pense « reprendre mais quelque chose plus court » en deux séances d'atelier au lieu de quatre « car sur 36 semaines c'est déjà beaucoup ». Il s'interroge « est-ce que la position ça sert seulement pour la position ou bien est-ce que ça sert pour d'autre chose ? ».

Il est difficile, ici, de déterminer les éléments qui peuvent expliquer une différence dans la réception de l'ingénierie didactique et, consécutivement, le développement d'une situation d'enseignement de l'ordinal. Notons toutefois qu'Aline collabore depuis plusieurs années dans le cadre de la formation des enseignants avec l'une d'entre nous et qu'elle a lu l'ouvrage *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique* (Margolinas & Wozniak, 2012) à la suite de l'expérimentation de l'ingénierie et que de plus elle a une licence de mathématiques. En revanche, les relations de Béatrice et Claude avec les chercheurs étaient récentes et Béatrice, qui comme Aline a reçu l'ouvrage précité, ne l'a pas lu au moment où nous l'avons interrogée sur son intention de proposer une séquence d'enseignement sur l'ordinal s'appuyant sur l'ingénierie de recherche. Il apparaît ainsi qu'une légitimité apportée seulement par l'institution de recherche reste fragile. Néanmoins, une ingénierie comme celle des colliers rencontre non seulement des problèmes de légitimité mais aussi des problèmes dans l'organisation des séquences.

Des difficultés pédagogiques qui contraignent l'action des professeurs

L'ingénierie des colliers s'appuie sur une progression des types de situations:

- Action
- Formulation avec éloignement dans l'espace
- Formulation avec éloignement dans le temps
- Formulation à autrui (communication)

Le professeur doit pouvoir « trouver une place » pour faire vivre ces situations compte tenu des contraintes pédagogiques actuelles de l'école maternelle. En effet, seules des situations pouvant s'apparenter à des situations d'action sont d'usage courant dans la plupart des classes maternelles et si l'on trouve parfois des situations de communication à autrui, le plus souvent c'est le professeur qui est l'interlocuteur principal en absence de rétro-action d'un milieu.

Les conditions pédagogiques actuelles de l'école maternelle en France conduisent à distinguer deux grands types d'organisation didactique :

- Les « rituels » sont des temps de travail collectifs quotidiens voire bi-quotidiens (le matin et l'après-midi) durant lesquels sont réalisées un nombre variable d'activités d'une classe à l'autre. Ces activités stables consistent, par exemple, à identifier la date ou la météo du jour, repérer les élèves présents ou absents. Certains professeurs utilisent le moment des « rituels » pour des activités disciplinaires (comme par exemple Aline, qui alterne mathématiques et français le matin ou l'après-midi) ;
- Les « ateliers » sont des temps d'activités où les élèves travaillent par groupes de 6 à 8 autour d'une même table. Ils sont le plus souvent organisés autour d'un atelier dirigé par le maître et de trois ateliers « autonomes » dans lesquels les enfants agissent seuls ou bien sous la direction d'un adulte autre que le professeur de la classe (agent territorial spécialisé des écoles maternelles, assistants d'éducation, etc.). Les ateliers sont le plus souvent en rotation sur quatre jours de la semaine. À un moment donné de la semaine, certains élèves ont donc participé à un atelier donné et d'autres pas encore, c'est seulement à la fin de la semaine que tous les élèves ont normalement participé à chaque atelier.

Le professeur doit donc trouver le moyen de jongler avec ces contraintes et faire preuve d'ingéniosité pour mettre en œuvre les situations de l'ingénierie des colliers. En juin 2012, la participation à une recherche, par son côté « exceptionnel » justifiait sans doute de « bousculer » les habitudes. En 2013, ce sont les enseignants eux-mêmes qui ont conçu le dispositif d'enseignement, ce qu'ils ont fait différemment.

Vers un enseignement explicite de l'ordinal : le cas d'Aline

Aline intègre le nombre comme mémoire de la position dans son enseignement sur toute l'année. Elle change le matériel (figure 19) d'une part pour des raisons de commodité, mais aussi parce que, comme elle l'explique plusieurs fois au chercheur, elle veut travailler dans un milieu dans lequel l'origine n'est pas donnée par des raisons matérielles : elle considère en effet que puisqu'on enfile toujours les perles en les poussant vers le nœud, cela conduit à considérer plutôt le nœud comme origine et cela peut conduire à ne pas expliciter l'origine. Les barres de cubes peuvent se considérer soit à partir de leur partie femelle « trou » soit à partir de leur partie mâle « bouton » (vocabulaire adopté par les élèves), puisqu'ils sont emboitables. C'est cette caractéristique (deux origines possibles pour la barre) qu'Aline met en avant quant à son choix de privilégier ce matériel.

Sans développer davantage les différences spécifiques du milieu des colliers par rapport au milieu des cubes, notons toutefois que dans le milieu des colliers aussi deux origines sont possibles. Certains élèves ont choisi le nœud et d'autres l'autre extrémité du collier, ce qui a été une source d'erreur dans la situation de formulation à autrui. D'autre part, dans le milieu des colliers comme dans celui des barres, le mode de validation conduit à expliciter une mise en correspondance des perles ou des cubes dans une certaine orientation, celle donnée au collier ou à la barre : lorsque les nœuds des colliers sont mis en correspondance, l'autre extrémité l'est aussi ; lorsque les parties « bouton » des cubes d'une barre sont mises en correspondance, les parties « trou » le sont aussi. Il n'y a donc pas, de ce point de vue, un statut particulier au nœud.

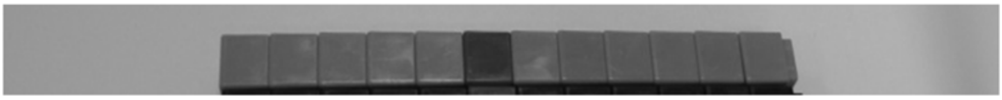

Figure 19. *– une barre de cubes*

En fin d'année, Aline introduit deux cubes de couleurs différentes sur la barre car elle espère ainsi conduire à une meilleure explicitation du besoin de définir un repère. Avec deux cubes colorés, l'élève peut utiliser un repérage absolu (utiliser la même origine pour repérer les deux cubes colorés) ou un repérage relatif (en situant un cube coloré par rapport à l'autre, une fois que l'un des deux est repéré sur la barre). Notons toutefois, que le recours à une quantité orientée qui repose sur le dénombrement des cubes « neutres » entre une extrémité et un cube coloré reste envisageable.

Du point de vue de l'organisation didactique, ce professeur joue d'une façon souple avec les contraintes pédagogiques. Elle utilise parfois des ateliers, en particulier au début : les situations d'action et de formulation avec éloignement dans l'espace sont réalisées dans le temps d'un seul et même atelier. La construction du message correspondant à l'éloignement dans le temps est réalisée par tous les élèves en même temps, après une consigne donnée collectivement, dans une organisation qui n'est pas usuelle dans la classe. Par contre, le premier décodage d'un message avec éloignement dans le temps est fait au cours d'un atelier dirigé car cela permet une première formalisation de ce qui est nécessaire pour réussir.

Par ailleurs, Aline introduit d'autres situations de communication. Ainsi, par exemple, au cours de l'une d'entre elles, un élève derrière un paravent doit glisser aux autres élèves un message écrit permettant de reproduire une barre dans laquelle sont insérées deux cubes de couleur. Par ailleurs, Aline intègre une dimension « publique » au travail dans des phases collectives (« rituels », figure20), ce qui permet à chaque élève de produire un message qui sera lu par un autre le lendemain, devant la classe. Les critères permettant de produire un message complet sont donc explicités à tous les élèves et renforcés pour chacun. Cette organisation avec des temps collectifs permet de renforcer l'institutionnalisation des savoirs introduits au cours de la séquence dans les ateliers.

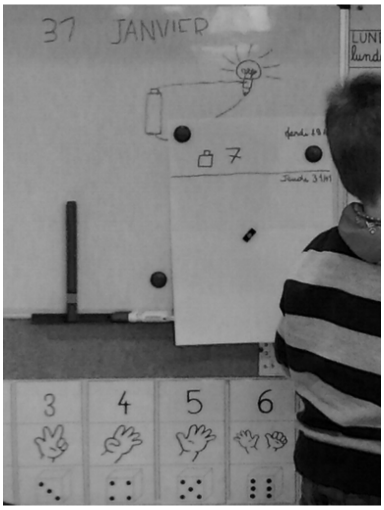

Figure 20. *– le travail sur la position est inclus dans les rituels*

Aline identifie clairement les procédures les plus efficaces, dès que l'avancée de leur construction par les élèves le permet. Elle choisit les formulations qu'elle estime adaptées et les fait mémoriser, en utilisant notamment les « rituels » pour faire avancer un travail régulier. Elle construit des situations permettant de mettre à l'épreuve les procédures. Elle a une ambition – même si elle ne sait pas si elle pourra l'atteindre – faire percevoir la construction d'un repère comme composante essentielle du repérage. Les différentes phases du processus d'institutionnalisation sont présentes.

Une institutionnalisation hésitante : le cas de Claude

La classe de Claude est organisée d'une façon qui est classique à l'heure actuelle en maternelle. Les moments collectifs (rituels) ne sont, le plus souvent, pas liés au travail en ateliers sauf pour donner les consignes des ateliers autonomes ou plus rarement faire un retour sur ce qui s'y est passé. Ces temps collectifs sont rarement utilisés pour renforcer l'institutionnalisation des connaissances rencontrées en ateliers. De plus, les ateliers autonomes sont presque toujours des fiches à compléter par écrit et l'ordre des ateliers dirigés ou autonomes est différent pour chacun des groupes, ils ne peuvent être organisés en progression. Ces contraintes, qui sont courantes à l'école maternelle, rendent difficile la réalisation de certaines situations, en particulier celle de la formulation avec éloignement dans le temps qui se réalise en deux temps : une phase assez courte dans laquelle, après la donnée de la consigne, les élèves doivent écrire le message puis ultérieurement une phase dans laquelle ils doivent reconstituer le collier à partir de leur message et valider leur production. C'est au cours de cette deuxième phase que peut avoir lieu une discussion collective des productions et des procédures efficaces.

Claude décide de réaliser la première phase, pour un groupe d'élèves, avant le travail d'un atelier « ordinaire », assez court, puis de faire la seconde phase, avec ce même groupe d'élèves, à un moment différent. Son organisation est un peu complexe car il a trois groupes d'élèves concernés[3] et donc six temps différents à organiser pour cette situation. Cependant, il

[3] Un groupe d'élèves plus jeunes (moyenne section, 4 à 5 ans) n'est pas concerné par les situations que nous étudions ici.

choisit cette organisation pour consacrer un temps important à la discussion des procédures (dans la deuxième phase) et donc à une partie du processus d'institutionnalisation : reconnaissance d'une connaissance utile, formulation, début de formalisation. Or il s'agit d'un type de tâche didactique auquel Claude n'est pas habitué dans les situations ordinaires, observées par le chercheur dans un premier temps.

En effet, au cours des ateliers qu'il met quotidiennement en place dans sa classe, la phase de validation des productions est très rapide et individuelle, il n'y a pas de discussion collective des productions ni des raisons de la réussite ou de l'échec. Ce professeur, qui a bien compris qu'il y avait là un processus essentiel dans la séquence qu'il a accepté d'utiliser, se trouve en difficulté devant la nécessité d'organiser une discussion des productions. De fait, alors même qu'il travaille avec un petit nombre d'élèves (six ou sept) autour d'une table ronde, que tous les élèves entendent ce que dit le maître et les autres élèves et voient ce qui se passe, les interactions entre le maître et un élève donné au sujet de sa production sont manifestement considérées par les autres comme un moment privé, qui ne regarde que l'élève lui-même et pas le collectif, ce qui correspond aux habitudes de la classe.

Claude a donc beaucoup de mal à aller au-delà de la simple constatation de la réussite ou de l'échec de chacun. Dans un groupe, il invalide quelques productions d'élèves qui ont « fait à l'envers », ces élèves veulent alors défaire le collier pour le refaire, mais le maître déclare qu'« il va falloir savoir pourquoi vous l'avez fait à l'envers ». Il met alors côte à côte deux productions : l'une d'un élève qui a réussi et l'autre d'un élève qui a « fait à l'envers ». Il commente alors assez rapidement le message réussi, en interaction avec l'élève concerné, ce qui permet de dire que sur ce message il y a les perles, le fil et le nœud, et que le nœud est important pour savoir dans quel sens on peut prendre le message. Ce commentaire est tout à fait pertinent et il constitue bien un discours qui contribue à l'institutionnalisation de la nécessité de marquer l'origine (le nœud) mais il n'est pas marqué par le professeur comme un moment réellement important, d'autant qu'il donne tout de suite après la consigne suivante : « faire un message pour quelqu'un d'autre ». Alors que les gestes qui permettent l'institutionnalisation sont ancrés dans les connaissances professionnelles d'Aline, ils peinent à émerger chez Claude.

Ceci est confirmé par la conception de l'enseignement (à la maternelle) qui est orchestré par ce professeur : durant les ateliers dirigés, les élèves doivent agir et apprendre de la situation, les interventions du professeur ne sont pas souhaitables et ne sont qu'un pis-aller qui révèle l'insuffisance de la situation. Claude multiplie les contraintes pour tenter de canaliser les élèves vers les procédures attendues. Par exemple, au cours du même atelier dirigé, les élèves ont :

- Décodé le message écrit quelques jours avant
- Ecrit un message pour un autre élève sur une feuille de taille A5
- Ecrit un message sur un petit bout de papier carré dont le côté est de la taille d'un trombone

Les élèves passent effectivement d'un dessin du collier, orienté ou non par le nœud, à une écriture chiffrée, plus compatible avec la taille du papier, en produisant souvent une quantité orientée. Cependant, le caractère presque frénétique de l'activité de production de message ne laisse pas le temps au processus d'institutionnalisation de se déployer pleinement. L'institutionnalisation est « diffuse » : les mots de l'ordinal sont prononcés par le professeur, mais « en passant », les élèves semblent un peu démobilisés. Quand il donne le petit papier, Claude profite du nombre impair d'élèves pour écrire lui-même un message (figure 21), ce qu'il ressent comme nécessaire bien qu'à la limite de la « triche ».

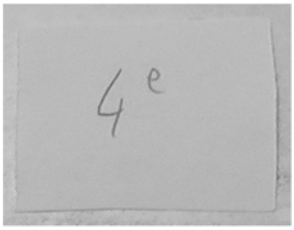

***Figure 21.** – le message de Claude*

Les élèves s'étant saisis de ce mode d'expression, l'intervention est efficace pour leur permettre de réussir. Seules les étapes de reconnaissance d'une connaissance utile et de formulation sont présentes dans le processus d'institutionnalisation, il manque ce qui pourrait renforcer les connaissances des élèves et leur donner un statut de savoir :

- formalisation. Claude produit son propre message, ce qui donne implicitement un statut à la désignation qu'il utilise, cependant, aucun bilan oral n'est organisé pour mettre en évidence les moyens efficaces de désigner la position.,
- mémorisation (pas d'usage fréquent des moyens de désignation),
- mise à l'épreuve (pas de mise à l'épreuve des moyens de désignation dans des situations différentes de la situation initiale des colliers),
- généralisation (pas de reconnaissance de la portée des moyens de désignation),
- valeur culturelle et sociale (pas de mise en évidence de l'usage social de l'ordinal).

Les élèves apprennent ce que le professeur enseigne

A la fin de la séquence, les travaux des élèves sont tout à fait conformes à ce que le professeur attendait. Dans la classe de Claude, les élèves utilisent majoritairement l'écriture visée par le maître (figure 22).

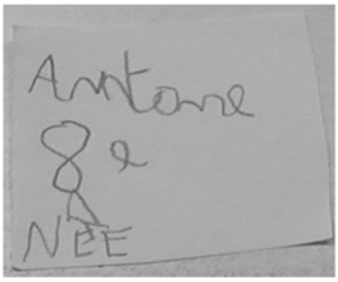

***Figure 22.** – Claude, Désignation de la huitième perle à partir du nœud (NEE) dans la classe de Claude*

Dans la classe d'Aline, les élèves produisent des désignations qui intègrent les prémisses d'une représentation d'un repère, quand ils veulent communiquer la position de deux cubes de couleur dans la barre..

Noémie (figure 23) désigne ainsi l'origine (O) puis la position du cube jaune (2 écrit en jaune) et du cube rouge (6 écrit en rouge), et cherche à indiquer une orientation (flèche inversée), cependant on ne peut pas savoir en regardant le dessin si il y a conflit entre l'origine et l'orientation ou bien si Noémie ne connaît pas la convention du dessin d'une flèche pour indiquer une orientation. Tom (figure 23) fait de même mais en utilisant la dimension du segment orienté partant de l'origine pour indiquer la position 1 (en rouge, proche du O représentant l'origine) et la position 11 (en jaune, proche de la flèche qui représente peut-être la fin de la barre), la direction de la flèche est conforme à l'usage et au sens qu'il a utilisé.

Figure 23. *– Désignation des positions de deux perles de couleur (rouge et jaune) dans la classe d'Aline*

Les deux professeurs observés, en dehors de l'ingénierie de recherche, obtiennent donc de leurs élèves ce qu'ils ont prévu d'enseigner, ils réussissent à atteindre leurs objectifs par des moyens différents qui pourraient avoir des effets plus ou moins différenciateurs (voir le texte de Lalina Coulange, dans cet ouvrage). Mais les objectifs que le professeur cherche à atteindre ainsi et les productions des élèves qui en découlent dépendent des connaissances du professeur concernant à la fois les propriétés didactiques des situations et les savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shulman, 1986) qui, ici, concernent le repère (origine, orientation), le nombre ordinal, la dualité ordinal/cardinal. Les observations ainsi réalisées attestent qu'il existe des conditions d'émergence du nombre ordinal comme mémoire de la position à l'école maternelle :

- la considération de la construction du repère (origine, orientation) comme consubstantielle de celle de l'ordinal et donc comme un savoir légitime
- le dépassement du nombre ordinal comme une simple particularité langagière en situation
- le dépassement de la domination du cardinal sur l'ordinal.

LES BESOINS PRAXEOLOGIQUES DU PROFESSEUR

De nombreux travaux attestent de la possibilité pour les didacticiens de déterminer les besoins praxéologiques des professeurs autrement que par l'observation dans les classes, ce qu'illustre, par exemple, la revue des travaux sur l'algèbre présentée par Grugeon et Coppé dans cet ouvrage. Les analyses écologiques et l'étude des phénomènes de transposition didactique comme l'échelle des niveaux de codétermination didactique (Wozniak, 2005) permettent de révéler le système de conditions et de contraintes dans lequel est plongé le professeur et conduisent à la mise au jour de leurs besoins praxéologiques. Cependant, nous aborderons à présent comme une question de méthodologie de recherche, le diagnostic de ces besoins *via* les observations de classe, regardées comme des éléments d'un faisceau de faits concordants.

Les besoins praxéologiques des professeurs peuvent être relatifs à l'organisation mathématique ou à l'organisation didactique, comme nous venons de le voir précédemment. Ils s'expriment par l'identification d'une distance entre un modèle praxéologique de référence construit par le didacticien et l'enjeu de savoir considéré, au sein d'une institution donnée. Or l'enjeu du savoir se révèle au travers du discours technologique qui met à jour, décrit, explicite, justifie, questionne et valide les connaissances utilisées. C'est l'institutionnalisation qui permet de distinguer le contingent du nécessaire dans l'élaboration de l'organisation mathématique visée. Il faut des mots, des notations, des ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999) pour que la classe se dise à elle-même les savoirs qu'elle a collectivement construits et qui intégreront une culture partagée. C'est pourquoi nous avons introduit (Wozniak, 2012) une classification des praxéologies en fonction du rôle du discours technologique. Nous parlons de *praxéologie muette* lorsque celle-ci se donne à voir uniquement au travers de sa composante *praxis* ; seule la technique mise en œuvre dans un rapport d'action est perceptible alors que la composante *logos* n'est pas audible, à moins qu'elle ne soit simplement tue. Une *praxéologie faible* laisse entrevoir la composante *logos* au travers des ostensifs associés à la technique mise en œuvre ; le discours technologique reste implicite ou limité à la seule description de la technique dans un rapport de formulation non encore abouti. Tandis qu'une *praxéologie forte* met en œuvre dialectiquement les deux composantes *praxis* et *logos* dans des rapports d'action, de formulation et de validation, les besoins praxéologiques, dans les observations de classe se révèlent par la mise en œuvre par le professeur de praxéologies muettes, au mieux, faibles qui traduisent des savoirs comme *transparents* pour le professeur et en conséquence pour les élèves (Margolinas & Laparra, 2008b; Margolinas & Laparra, 2011). Ces *savoirs transparents* se manifestent par des connaissances en situation qui ne sont jamais enseignées, jamais institutionnalisées (Coulange, 2012). L'exemple paradigmatique de ce type de savoirs est l'énumération (Briand, 1999) qui est naturalisée et incorporée dans des praxéologies muettes (Margolinas, Wozniak, & Rivière, soumis).

Nous avons fait état de trois types d'observation : une observation post-intervention du chercheur (cas de Claude), une observation organisée par la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de recherche et une observation post-ingénierie didactique de recherche (cas d'Aline et Béatrice). Dans le cas d'une observation faisant suite à une « perturbation », les indicateurs permettant de poser un diagnostic sur les besoins praxéologiques du professeur sont de deux ordres : d'une part, l'identification de ce que le professeur « prend » de ce que lui a apporté le chercheur, d'autre part la distance entre les praxéologies du professeur et le modèle de référence (organisation mathématique et organisation didactique) du chercheur pour son étude. C'est ce que nous avons observé avec Claude qui, bien qu'il ait mesuré l'importance de prendre en charge le processus d'institutionnalisation, se trouve en difficulté devant la nécessité d'organiser une discussion des productions et ne réussit pas à sortir du simple constat de la réussite ou de l'échec.

Dans le cas d'une observation organisée autour de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de recherche, les organisations mathématiques et didactiques sont données par l'ingénierie. Cependant, le système de contraintes de la situation du professeur laisse libre une certaine part de *logos* dans l'accompagnement du travail de l'élève. Une ingénierie didactique ne peut pas tout prendre en charge, comme les réactions des élèves qui interrogent le professeur ou ses réponses « dans le feu de l'action ». C'est dans cet espace laissé libre que peuvent se révéler les besoins praxéologiques du professeur. Un indicateur, en effet, de ces besoins praxéologiques peut être la modification d'une organisation mathématique par cette part de *logos* laissée libre dans le système de contraintes imposées par l'ingénierie didactique de recherche.

Enfin, dans le cas d'une observation post-ingénierie didactique de recherche, l'intégration ou non des nouvelles connaissances et des nouveaux savoirs portés par l'ingénierie dans les pratiques du professeur peut être regardée comme un indice des besoins praxéologiques du professeur. Cette ingénierie didactique de recherche, dont le but initial était de répondre à une question de recherche, se révèle insuffisante pour satisfaire de tels besoins. Cependant la mise en œuvre d'une telle ingénierie, par la dimension novatrice qu'elle intègre, au moins pour le professeur qui la met en œuvre, est potentiellement une première rencontre avec des organisations de savoirs mathématiques ou didactiques. Une telle ingénierie didactique de recherche, qui n'intègre pas *a priori* la dimension formatrice pour le professeur, est cependant potentiellement une situation d'apprentissage pour celui-ci. Nous avons vu dans le cas de Béatrice, qui a collé au plus près de ce que nous lui proposions, que cette première rencontre a été une rencontre manquée avec le nombre ordinal. Alors qu'Aline, qui a davantage joué dans les espaces de liberté laissé par l'ingénierie, a prolongé la rencontre en se formant elle-même dans une démarche de développement de sa pratique ce qui l'a conduite à (re)travailler sur l'ingénierie et la faire évoluer.

Au-delà de ces trois types d'observation, il est possible pour le chercheur de réaliser une observation « naturaliste » en se rendant dans une classe comme simple « spectateur », sans intervention de sa part auprès du professeur qui ne sait pas à l'avance ce que le chercheur observe en particulier. Un indicateur des besoins praxéologiques du professeur peut être alors la mise en œuvre de praxéologies muettes qui laissent transparents certains savoirs. C'est le cas, par exemple, lorsque les savoirs sont non maîtrisés ou regardés comme institutionnellement non légitimés. Nous avons évoqué précédemment l'énumération, mais ceci s'observe avec la modélisation à l'école primaire (Wozniak, 2012) ou la variabilité dans l'enseignement secondaire (Wozniak, 2005). Évidemment, il existe un continuum entre ces différents types d'observation qui empêche une classification exhaustive des types d'observation que peut réaliser le didacticien pour ses recherches sur les besoins praxéologiques du professeur.

CONCLUSION

Brousseau (2005) définit trois types de situation fondamentale :

- la *situation typique ou caractéristique* qui « vise à fournir un modèle qui, par le jeu de ses variables et de leurs limitations, peut convenir à n'importe quelle situation où cette notion intervient » ;
- la *situation significative* qui « vise à servir de référence, à représenter symboliquement au besoin, ce qui est essentiel dans les objets et dans leurs relations » ;
- la *situation initiale d'un processus génétique* qui « peut engendrer un *processus* qui aboutit à la connaissance de la notion par le jeu des questions qu'elle conduit à se poser, et des réponses qu'elle appelle. » (*op. cit.*, p. 19).

Cependant, comme le souligne Brousseau (2000) :

> « *une situation fondamentale n'est pas a priori une situation "idéale" pour l'enseignement, ni même une solution plus efficace*. La valeur d'une situation à usage didactique s'apprécie en fonction d'un grand nombre d'autres paramètres externes tels que la possibilité effective de la mettre en œuvre dans un environnement psycho-socio-culturel déterminé ». (Brousseau 2000, p. 8, en italiques dans le texte)

La situation fondamentale de l'ordinal dans le milieu des colliers ne doit pas être regardée comme une situation d'enseignement transférable ainsi dans les classes.

La description des savoirs au travers des praxéologies passe par la description de situations comme instanciation de situations fondamentales, mais ce ne sont pas des situations d'enseignement. L'ingénierie didactique de recherche est nécessaire au chercheur pour confronter l'analyse *a priori* de la situation fondamentale à la contingence mais elle est conçue en s'affranchissant autant que faire se peut des contraintes micro et macro-didactiques de l'institution étudiée dont rend compte l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Il ne s'agit donc pas, pour le chercheur, de se placer au plus près de la position particulière de tel professeur singulier, même si la dimension éthique liée à l'intervention dans la classe le contraint et influe sur la conception de l'ingénierie ; il n'est évidemment pas possible de faire comme si telle classe était un laboratoire aseptisé. Dans ce texte, la conception d'une ingénierie est bien une phénoménotechnique et l'ingénierie elle-même un modèle pour comprendre les mathématiques à enseigner, non un modèle d'enseignement.

Nous renvoyons au texte de Perrin-Glorian (Perrin-Glorian, 2011) qui a bien montré toute la complexité de la réception des ingénieries didactiques pour la recherche, au sein de l'institution scolaire, en lien avec la diversité des types d'ingénieries didactiques, c'est-à-dire les types de questions auxquelles elles apportent réponse, que ce soit pour la recherche, la formation, ou la conception de situations d'enseignement dans les classes. L'ambiguïté de la place des ingénieries nait, en particulier, du fait qu'elles sont expérimentées dans des classes, plus ou moins « ordinaires ». Ceci peut générer des incompréhensions avec les professeurs et il est de la responsabilité des didacticiens de lever ces ambiguïtés.

En guise de conclusion, nous souhaiterions revenir au thème de ce livre en abordant le rôle et la place du didacticien dans le système éducatif. Dans nos rôles d'enseignantes et de formatrices d'enseignants, dans une perspective d'adossement de nos formations par la recherche, nous nous plaçons dans la position de donner de l'intelligibilité aux savoirs à enseigner. C'est le pari que nous avons tenté de relever dans notre ouvrage (Margolinas & Wozniak, 2012). Donner de l'intelligibilité aux savoirs à enseigner signifie, par exemple, identifier les conditions écologiques de leur enseignement ou pouvoir rendre compte des contraintes qui empêchent que tel objet de savoir soit enseigné. Cela signifie appréhender les phénomènes didactiques selon une perspective anthropologique fondée sur un relativisme institutionnel. Tenir une telle position permet aux professeurs de modifier leur rapport aux savoirs à enseigner et aux savoirs didactiques qui fondent leur professionnalité. Le professeur est alors, concomitamment, déresponsabilisé en tant qu'individu – comme sujet d'une institution – et collectivement comptable de ce qui se fait à l'école. Ainsi, le travail du chercheur didacticien crée certaines des conditions pour que les professeurs abordent leurs difficultés comme des problèmes de leur profession plutôt que comme leurs difficultés propres.

Ceci confère aux didacticiens une responsabilité sociale et les oblige à une exigence scientifique sans faille. Pour le donner à comprendre, prenons l'exemple de l'analyse que fait Brousseau du phénomène de « l'innovation » pédagogique :

> « […] le propre d'une innovation c'est de disqualifier une pratique ancienne afin de la remplacer par une autre, et non pas de la corriger. On a l'illusion empiriste que parmi les cent fleurs de l'innovation, les enseignants vont cueillir celles qui seront le plus adaptées, mais une innovation chasse l'autre, elle critique la précédente mais ne la régule pas. Certaines connaissances ne peuvent plus être enseignées et disparaissent, non pas parce qu'on a décidé qu'elles sont devenues inutiles mais parce que des cascades d'innovations ont fait disparaître l'écosystème qui leur permettait d'exister comme objet d'enseignement. Les modes passent, ou reviennent sans progrès véritable. L'idéologie de l'innovation tue l'innovation. Ce qui ne veut pas dire que le conservatisme didactique ne présente pas d'autres inconvénients tout aussi redoutables. » (Brousseau, 2000, p. 24 de la version déposée sur HAL)

Toutes les conditions qui relèvent des niveaux supérieurs dans l'échelle de codétermination didactique ne sont pas réunies pour que le didacticien puisse jouer pleinement son rôle auprès des professeurs et, au-delà, de la société. Ce n'est pas l'objet de ce texte que d'en commencer l'inventaire mais l'ARDM devrait être le lieu pour, *a minima,* penser les conditions de tels changements rendus à présent vitaux par l'état de l'enseignement des mathématiques, et au-delà de l'école. La tâche est grande mais pas insurmontable aussi terminerons-nous résolument par une note d'optimisme volontariste à l'instar de Chevallard :

> « Les citoyens, le corps social, le corps politique ont des besoins de connaissances. L'existence de ces besoins qu'il faut identifier est le critère premier pour constituer le "noyau essentiel d'instruction". Il ne faut pas avoir peur des choses difficiles : dès lors qu'elles sont vécues comme indispensables, elles deviennent, moyennant un travail transpositif adéquat, pratiquement enseignables. C'est à ce prix que l'on fait société. » (Chevallard 2012, p. 6)

BIBLIOGRAPHIE

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bautier, E., & Rayou, P. (2009). *Les inégalités d'apprentissage*. Paris: Presses Universitaire de France.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble: La pensée sauvage.

Bolsius, C., & Gros, P. (2010). Du comptage au calcul. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre du cycle 2* (pp. 35-38). Paris: SCÉRÉN CRDP-CNDP.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-124.

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 41-76.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'Ecole Elémentaire* (pp. 428-442). Paris APMEP. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Processus_de_mathematisationVO.pdf

Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue Française de Pédagogie, 45*, 130-140. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515106

Brousseau, G. (1980). Problèmes de didactique des décimaux : première partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*(1), 11-59.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux : deuxième partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1995). Les mathématiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP, 400*, 831-850. http://www.apmep.asso.fr/Les-mathematiques-a-l-Ecole,3626

Brousseau, G. (1998a). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998b). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques from ≤http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf≥

Brousseau, G. (2000). Education et Didactique des mathématiques. *Educaciòn matemàtica, 12*(1), 5-39. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00466260/fr/

Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la Didactique des Mathématiques* (pp. 165-194). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1997a). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique. *Skholê, 7*, 45-64. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_savoirs_enseignes_et_leur_transmission.pdf

Chevallard, Y. (1997b). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(3), 17-54. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Familiere_et_problematique.pdf

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2012). Eléments pour une instruction publique nouvelle. *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques*. from ≤http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_CNEM_-_Intervention.pdf≥

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(2-3), 221-270.

Coulange, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves.* Habilitation à diriger les recherches, Université Denis Diderot, Paris. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00801863

Couturat, L. (1896). *De l'infini mathématique* (1973 ed.). Paris: Albert Blanchard. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3841x.r=couturat.langFR

Douglas, M. (2004). *Comment pensent les institutions* (A. Abeillé, Trad.). Paris: La découverte.

Duprey, G., Duprey, S., & Sautenet, C. (2009). *Vers les maths. Maternelle Petite section*. Schiltigheim: ACCÈS Éditions.

Durpaire, J.-L., & Mégard, M. (Eds.). (2010). *Le nombre au cycle 2*. Paris: SCÉRÉN CRDP-CNDP.

Durpaire, J.-L., & Mégard, M. (Eds.). (2012). *Le nombre au cycle 3*. Paris: SCÉRÉN CRDP-CNDP.

Emprin, F., & Emprin, F. (2010). Premières compétences pour accéder au dénombrement. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 2* (pp. 23-34). Poitiers: Scérén.

Gros, P., & Calmelet, J. (2012). Les nombres entiers naturels au cycle 3. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 3* (pp. 7-12). Paris: SCÉRÉN CRDP-CNDP.

Laparra, M., & Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques, 145-146*, 141-160. http://www.pratiques-cresef.com/p145_la1.pdf

Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(2), 221-280.

Margolinas, C. (2012a). Connaissance et savoir Des distinctions frontalières? *Colloque sociologie et didactiques*, from http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779070

Margolinas, C. (2012b). *Des savoirs à la maternelle? Oui, mais lesquels?* XXXIX colloque COPIRELEM Quimper. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00744279

Margolinas, C., & Laparra, M. (2008a). *Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation.* Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation, Bordeaux. http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

Margolinas, C., & Laparra, M. (2008b). *Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir.* Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779656

Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2009). Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 135-146). Grenoble: La pensée sauvage.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2014). Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education 46*(1), 29-44. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-013-0554-y

Margolinas, C., Wozniak, F., & Rivière, O. (soumis). Situations d'énumération et organisation des collections. *Recherche en Didactique des Mathématiques*.

Ministère_de_l'Éducation_Nationale (2008). Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale, Hors série*(3).

Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développements, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97-147). Grenoble La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Vers une ingénierie didactique de deuxième génération ? . In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-77). Grenoble: La pensée sauvage.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique? . In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Wozniak, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique.* Université Claude Bernard, Lyon 1. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012056

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 32*(1), 7-55.